www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrices autorisées (circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986)
B.O. n° 34 du 2 octobre 1986

Les candidats devront justifier soigneusement toutes leurs affirmations . Il ne sera tenu aucun compte des résultats qui n'auront pas été justifiés par un raisonnement précis et rigoureux.

Les questions Q2, Q5, Q7, Q8 peuvent être abordées indépendamment des précédentes .

*****

f désigne une fonction réelle définie et continue sur l' intervalle fermé $[\alpha_o, \beta_o]$ de R, s'annulant en un point unique y_o de cet intervalle et vérifiant

$f(\alpha_o) \cdot f(\beta_o) < 0$.

Pour tout entier $n \geq 0$ on définit les suites (α_n) , (β_n) et (γ_n) par :

$$\begin{cases} \gamma_n = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2} \\ \text{Si } f(\alpha_n) \cdot f(\gamma_n) < 0 \quad \text{alors} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n \ ; \ \beta_{n+1} = \gamma_n \\ \text{Si } f(\alpha_n) \cdot f(\gamma_n) \geq 0 \quad \text{alors} \quad \alpha_{n+1} = \gamma_n \ ; \ \beta_{n+1} = \beta_n \end{cases}$$

Q1 - Montrer que $\lim(\alpha_n) = \lim(\beta_n) = y_o$

*****

Soient pour $n \geq 1$ deux suites de nombres réels (a_n) et (b_n) . On suppose que pour tout $n \geq 1$, $b_n \neq 0$. Soit $p_n(x)$ la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} p_o(x) = 1 \\ p_1(x) = a_1 - x \\ \text{pour } n \geq 2, \quad p_n(x) = (a_n - x)\, p_{n-1}(x) - b_{n-1}^2\, p_{n-2}(x) \end{cases}$$

Q2 - Pour tout $n \geq 1$

a) Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions $x \to p_n(x)$

b) Montrer que si le nombre réel $\tilde{x}_n$ est racine de $p_n(x)$ alors $p_{n-1}(\tilde{x}_n) \cdot p_{n+1}(\tilde{x}_n) < 0$

c) Montrer que $p_n(x)$ admet n racines réelles distinctes $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n}$ et que, si $n \geq 2$, pour tout k , tel que $1 \leq k \leq n-1$, $x_{n,k} < x_{n-1,k} < x_{n,k+1}$.

Comparer les signes de $p_{n+1}(x)$ et de $p_n(x)$ pour $x \in]\, x_{n+1,k}\, , x_{n,k}\, [$ et pour $x \in]\, x_{n,k}\, , x_{n+1,k+1}\, [$.

*****

On associe aux suites (a_n) et (b_n) introduites précédemment la suite des matrices (A_n) à n lignes et n colonnes, symétriques et tridiagonales de la forme :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & b_{i-1} & a_i & b_i & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Q3 - Montrer que les racines de $p_n(x)$ sont les valeurs propres de la matrice A_n .

*****

Pour tout x réel non nul on pose $\text{signe}(x) = \dfrac{x}{|x|}$

et pour tout y réel et tout entier $n \geq 1$ on pose :

$$\text{sgn}(p_n(y)) = \begin{cases} \text{signe}(p_n(y)) \text{ si } p_n(y) \neq 0 \\ \text{signe}(p_{n-1}(y)) \text{ si } p_n(y) = 0 \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

E.N.S.I. de CHIMIE:Groupe Nord:F
page 155
1989 1

On désigne par N(n ; y) le nombre d'éléments égaux à -1 dans l'ensemble :

$$\{ \operatorname{sgn}(p_{k-1}(y)) \cdot \operatorname{sgn}(p_k(y)) \ , \ 1 \le k \le n \} \qquad (\text{avec} \quad \operatorname{sgn}(p_o(y)) = 1)$$

Q4 - Montrer (en raisonnant par récurrence sur n) que N(n ; y) est le nombre de racines du polynôme $p_n(x)$ inférieures strictement à y.

*****

Q5 - Montrer en utilisant la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une matrice, que les valeurs propres de A_n appartiennent au sous-ensemble de R :

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left[a_i - |b_{i-1}| - |b_i| \ , \ a_i + |b_{i-1}| + |b_i| \right]$$

(avec $b_o = 0$)

*****

Q6 - On suppose n et i fixés, avec $1 \le i \le n$. En utilisant Q4, construire deux suites (α_k) et (β_k) telles que :

$$\begin{cases} \alpha_k \le x_{n,i} \le \beta_k \\ \lim(\alpha_k) = \lim(\beta_k) = x_{n,i} \end{cases}$$

*****

Q7 - On suppose dans cette question que pour tout k , $a_k = 2$, $b_k = -1$ et on considère la matrice A_n correspondante.

a) Montrer que si x est un vecteur propre de A_n, associé à la valeur propre λ, en posant :

(2) $\quad x_o = 0$

(3) $\quad x_{n+1} = 0$

les composantes $x_1, x_2, \ldots$ et x_n de x vérifient :

(4) $\quad \forall k, 1 \le k \le n \ , \ -x_{k+1} + (2-\lambda) x_k - x_{k-1} = 0$

b) Montrer que toute suite (x_k), $0 \le k \le n+1$, vérifiant (2) et (4) dans le corps des nombres complexes, est telle qu'il existe deux nombres complexes r et a vérifiant :

$$\text{pour} \quad 1 \le k \le n+1 \qquad x_k = a \left(r^k - \frac{1}{r^k} \right)$$

c) En déduire l'ensemble des vecteurs propres et des valeurs propres de la matrice A_n. Montrer que A_n est définie positive.

*****

Soit $C = (c_{ij})$, $1 \le i,j \le n$ une matrice symétrique réelle, I la matrice unité d'ordre n. Soit v une matrice colonne à n lignes à éléments réels, v' désigne sa transposée avec $v' = (v_1, v_2 \ldots v_n)$

On pose $\quad \| v \| = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Soient pour $1 \le i \le n$ les matrices colonnes e_i , à n lignes définies par :

$$e'_i = (\delta_{i,1}, \delta_{i,2} \ldots \delta_{i,i}, \ldots \delta_{i,n})$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \ne j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

On associe à v la matrice carrée d'ordre n

$$H(v) = I - \frac{2}{v'v} vv' \qquad \text{si } v \ne 0$$

$$H(0) = I$$

Q8

a) Montrer que H(v) est symétrique et que $H^{-1}(v) = H(v)$.

b) On pose $w = v - v_1 e_1$. Montrer que $H(w + \|w\| e_2) v = v_1 e_1 - \|w\| e_2$.

Calculer les éléments de la première ligne et de la première colonne de $H(w + \|w\| e_2)$.

c) En déduire qu'il existe une matrice H_1 telle que :

$$H_1 C H_1^{-1} = C_1$$

$$\text{avec} \quad C_1 = (c^1_{i,j}) \quad 1 \le i,j \le n \ , \text{ symétrique}$$

$$\text{et} \quad c^1_{1,j} = c^1_{j,1} = 0 \quad \text{pour } 3 \le j \le n$$

et que toute matrice carrée symétrique est semblable à une matrice tridiagonale de la forme (1), les nombres b_i n'étant pas nécessairement non nuls.

page 156 E.N.S.I. de CHIMIE:groupe Nord:P 1989 2

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail